Série N^{o}6 : Matrices, déterminants et systèmes

Exercice 1

Soit A la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Trouver l'endomorphisme φ associé à A relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer le déterminant de A.
3. Déterminer la matrice inverse A^{-1}. φ est-il bijectif ?
4. Déterminer φ^{-1} relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2

Soit $(\mathcal{S})$ le système différentiel linéaire sans second membre

$$(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & x(t) - \frac{1}{2}\, y(t) \\ y'(t) & = & 2\, x(t) - y(t) \end{array} \right.$$

où x et y sont des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $t \in \mathbb{R} \longmapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

1. Écrire $(\mathcal{S})$ sous la forme matricielle $X'(t) = BX(t)$ où B est une matrice à déterminer. La matrice B est-elle inversible ?
2. Calculer B^2 et B^3. Que peut-on déduire ?
3. Calculer la matrice $A = \exp(tB)$ en fonction de t.
4. En déduire les expressions des fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ lorsque $x(0) = 1$ et $y(0) = -1$.

Exercice 3

Soit A la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à A relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer l'expression de φ
2. Calculer A^2 et A^3, puis déterminer φ^2 et φ^3.
3. Calculer le déterminant de A, puis déterminer la matrice A^{-1}.

Exercice 4

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et A_α la matrice carrée donnée par $A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -1 \\ 2 & \alpha & 1 \\ -4 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$.

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{I}$ des valeurs de α pour lesquelles la matrice A_α est inversible.
2. Calculer la matrice A_α^{-1} pour α appartenant à $\mathcal{I}$.
3. En déduire, lorsque $\alpha \in \mathcal{I}$, la solution du système $(\mathcal{P}) : \left\{ \begin{array}{c} \alpha\, x + 0y - z = -1 \\ 2x + \alpha\, y + z = 1 \\ -4x - y + \alpha\, z = 1 \end{array} \right.$

Exercice 5

Soit A la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

On appelle la **trace** de A le nombre noté "tr(A)" défini par $\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22}$.
Montrer que le polynôme caractéristique $P_A(x)$ de A s'écrit sous la forme

$$P_A(x) = x^2 - \text{tr}(A)x + \det(A)$$

Exercice 6

On donne une matrice A carrée d'ordre n, A, dont le coefficients appartiennent à un corps commutatif $\mathbb{K}$; on note P le polynôme caractéristique de A.

1. Montrer que A est inversible si et seulement si $P(0) \neq 0$
2. Montrer que le polynôme caractéristique R de A^{-1} s'écrit sous la forme suivante :
$$R(x) = \frac{(-1)^n x^n}{P(0)} P\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exercice 7

Soit M la matrice donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ associé à A relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. Déterminer l'expression de φ
2. Calculer A^2 et A^3, puis déterminer φ^2 et φ^3.
3. Calculer le déterminant de A, puis déterminer la matrice A^{-1}.

Exercice 8

Soit $(\mathcal{S})$ le système différentiel linéaire sans second membre

$$(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & x(t) + 2\,y(t) + z(t) \\ y'(t) & = & 2\,y(t) + 3z(t) \\ z'(t) & = & 3z(t) \end{array} \right.$$

où x, y et z sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Soit $t \in \mathbb{R} \longmapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

1. Écrire $(\mathcal{S})$ sous la forme matricielle $X'(t) = BX(t)$ où B est une matrice à déterminer. La matrice B est-elle inversible ? Qu'appelle-t-on ce type de matrice ?
2. Montrer que la matrice B s'écrit sous la forme $D + N$ où D est une matrice diagonale à déterminer et N est une matrice nilpotente à déterminer.
*Déterminer l'indice de nilpotence de N.
3. En utilisant l'écriture $B = D + N$, montrer que $\exp(tB) = \exp(tD)\left(I_3 + tN + \frac{1}{2}t^2N^2\right)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ où I_3 est la matrice identité de taille (3×3).
4. Calculer les matrices $P = \exp(tD)$ et $Q = I_3 + tN + \frac{1}{2}t^2N^2$.
5. En déduire l'expression de la matrice $A = \exp(tB)$ en fonction de t.
6. En déduire les expressions des fonctions $t \mapsto x(t)$, $t \mapsto y(t)$ et $t \mapsto z(t)$ lorsque $x(0) = k_1$, $y(0) = k_2$ et $z(0) = k_3$.
*Déterminer les fonctions $t \mapsto x(t)$, $t \mapsto y(t)$ et $t \mapsto z(t)$ lorsque $k_1 = 1$, $k_2 = -1$ et $k_3 = 2$.